Análise da Estabilidade do Movimento Rotacional de um Satélite Artificial sobre a Influência do Gradiente de Gravidade pelo Critério de Routh Hurwitz

Regina Elaine Santos Cabette
INPE – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – ETE/DMC
12227-010, São José dos Campos, SP
E-mail: recabette@uol.com.br

Maria Cecília Zanardi, Rodolpho Vilhena de Moraes

UNESP – Faculdade de Guaratinguetá
Depto. de Matemática - FEG
Av. Ariberto Pereira da Cunha, 333
12516-410, Guaratinguetá, SP
E-mail: cecília@feg.unesp.br , rodolpho@feg.unesp.br

Resumo

O presente trabalho analisa a estabilidade de satélites artificiais sujeitos a ação do torque de gradiente de gravidade. O estudo da estabilidade é realizado utilizando o critério de Routh Hurwitz para um caso particular.

1- Introdução

A análise da estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais na presença de torques externos é de grande importância na manutenção da orientação espacial do satélite, de maneira que este possa desempenhar com sucesso a missão ao qual está destinado.

Pretende-se neste trabalho analisar a estabilidade do movimento rotacional de satélites, utilizando-se um conjunto de variáveis canônicas adequadas que facilitem a utilização de métodos de análise de estabilidade. O torque externo incluído é o torque de gradiente de gravidade.

O critério escolhido para a análise de estabilidade é o critério de Routh Hurwitz o qual determina se há ou não raízes instáveis de uma equação característica associada ao sistema em estudo, sem que haja necessidade de determinar tais raízes.

2 - Equações do Movimento

Utilizando o formalismo Hamiltoniano, as variáveis de Andoyer [2] caracterizam o movimento do satélite em torno de seu centro de massa e as variáveis de Delaunay descrevem o movimento do centro de massa do satélite em torno da Terra, o qual é admitido conhecido.

Nas equações do movimento rotacional do satélite artificial é incluído, na Hamiltoniana do problema, a parcela associada ao gradiente de gravidade, com o satélite suposto simétrico, o que corresponde a dois momentos principais de inércia iguais (A = B).

Deste modo com o formalismo Hamiltoniano, as equações do movimento rotacional são dadas por [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,l_i}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial L_i} \\ \dfrac{dL_i}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial l_i} \end{cases} \qquad (i = 1,2,\dots,n) \qquad (1)$$

em que: L_i , l_i são as variáveis de Andoyer e F é a Hamiltoniana do problema.

A Hamiltoniana do problema em estudo, em termos das variáveis de Andoyer e de Delaunay [1], é expressa por:

$$F(L_1, L_2, L_3, l_2, l_3, L, G, H, l, g, h) =$$
$$F_o(L, L_1, L_2) + F_1(L_1, L_2, L_3, l_2, l_3, L, G, H, l, g, h) \qquad (2)$$

em que:

L_1, L_2, L_3, l_2, l_3 são as variáveis de Andoyer;

L, G, H, l, g, h são as variáveis de Delaunay.

$$F_o = -\frac{\mu^2 M^3}{2L^2} + \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right] L_1^2 + \frac{1}{A} L_2^2\right\} \qquad (3)$$

$$F_1 = \frac{\mu^4 M^7}{L^6}\left\{\frac{C-A}{M}\left\{\{1 + 3\,e\cos l\}\left[P_2\left(\frac{L_1}{L_2}\right)\left[-\frac{1}{2} + \right.\right.\right.\right.$$
$$+\frac{3}{8}\left(1+\theta^2+\theta_2^2-3\theta^2\theta_2^2\right)-\frac{3}{8}\sin 2I \sin 2I_2 \cos(h-l_3)+$$
$$\left.-\frac{3}{8}\sin^2 I \sin^2 I_2 \cos(2h-2l_3)\right]-\frac{3}{16}\left(1-3\theta^2\right)\sin 2I_2 \sin 2J_2 \cos l_2 +$$
$$+\frac{3}{16}\left(1-3\theta^2\right)\sin^2 I_2 \sin^2 J_2 \cos 2l_2 +$$
$$+\sum_{\varepsilon}\frac{3}{16}\sin 2I\left(1-\varepsilon\theta_2\right)\left(1+2\varepsilon\theta_2\right)\sin 2J_2 \cos\left(h-l_3-\varepsilon l_2\right)+$$
$$+\sum_{\varepsilon}\varepsilon\frac{3}{16}\sin^2 I \sin I_2\left(1-\varepsilon\theta_2\right)\sin 2J_2 \cos\left(2h-2l_3+\varepsilon l_2\right)+$$
$$-\sum_{\varepsilon}\varepsilon\frac{3}{16}\sin 2I \sin I_2\left(1-\varepsilon\theta_2\right)\sin^2 J_2 \cos\left(h-l_3+2\varepsilon l_2\right)+$$
$$\left.-\sum_{\varepsilon}\frac{3}{32}\sin^2 I\left(1-\varepsilon\theta_2\right)^2 \sin^2 J_2 \cos\left(2h-2l_3+2\varepsilon l_2\right)\right]+$$

$$+P_2\left(\frac{L_1}{L_2}\right)\left\{\frac{3}{8}\sin^2 I\left(1-3\theta_2^2\right)\right.$$
$$\left[\cos(2l+2g)+e\left[-\frac{1}{2}\cos(l+2g)+\frac{7}{2}\cos(3l+2g)\right]\right]+$$
$$+\sum_{\varepsilon}\varepsilon\frac{3}{8}\sin I\left(1+\varepsilon\theta\right)\sin I_2\left[\cos\left[2l+2g+\varepsilon\left(h-l_3\right)\right]+\right.$$
$$e\left[-\frac{1}{2}\cos\left[l+2g+\varepsilon\left(h-l_3\right)\right]+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{7}{2}\cos\left[3l+2g+\varepsilon\left(h-l_3\right)\right]\right]\right]+$$
$$-\sum_{\varepsilon}\frac{3}{16}\left(1+\varepsilon\theta\right)^2\sin^2 I_2\left[\cos\left[2l+2g+\varepsilon\left(2h-2l_3\right)\right]+\right.$$
$$+e\left[-\frac{1}{2}\cos\left[l+2g+\varepsilon\left(2h-2l_3\right)\right]+\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{7}{2}\cos\left[3l+2g+\varepsilon\left(2h-2l_3\right)\right]\right]\right]\right\}+$$
$$+\sum_{\varepsilon}\frac{9}{32}\sin^2 I \sin 2I_2 \sin 2J_2$$
$$\left\{\cos\left[2l+2g+\varepsilon l_2\right]+e\left[-\frac{1}{2}\cos\left[l+2g+\varepsilon l_3\right]+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{7}{2}\cos\left[3l+2g+\varepsilon l_3\right]\right]\right\}+$$
$$-\sum_{\varepsilon\,\delta}\varepsilon\frac{3}{16}\sin I\left(1+\varepsilon\theta\right)\left(1-\delta\theta_2\right)\left(1+2\delta\theta_2\right)$$
$$\sin 2J_2\left\{\cos\left[2l+2g+\varepsilon\left(h-l_3\right)+\varepsilon\delta l_2\right]+\right.$$
$$+e\left[-\frac{1}{2}\cos\left[l+2g+\varepsilon\left(h-l_3\right)+\varepsilon\delta l_2\right]+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{7}{2}\cos\left[3l+2g+\varepsilon\left(h-l_3\right)+\varepsilon\delta l_2\right]\right]\right\}+$$
$$+\sum_{\varepsilon\,\delta}\delta\frac{3}{32}\sin I_2\left(1+\varepsilon\theta\right)^2\left(1-\delta\theta_2\right)$$
$$\sin 2J_2\left\{\cos\left[2l+2g+\varepsilon\left(2h-2l_3\right)+\varepsilon\delta l_2\right]+\right.$$
$$+e\left[-\frac{1}{2}\cos\left[l+2g+\varepsilon\left(2h-2l_3\right)+\varepsilon\delta l_2\right]+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{7}{2}\cos\left[3l+2g+\varepsilon\left(2h-2l_3\right)+\varepsilon\delta l_2\right]\right]\right\}+$$
$$-\sum_{\varepsilon}\frac{9}{32}\sin^2 I \sin^2 I_2 \sin^2 J_2\left\{\cos\left[2l+2g+2\varepsilon l_2\right]+\right.$$
$$\left.+e\left[-\frac{1}{2}\cos\left[l+2g+2\varepsilon l_2\right]+\frac{7}{2}\cos\left[3l+2g+2\varepsilon l_2\right]\right]\right\}+$$
$$+\sum_{\varepsilon\,\delta}\varepsilon\delta\frac{3}{16}\sin I\left(1+\varepsilon\theta\right)\sin I_2$$
$$\left(1-\delta\theta_2\right)\sin^2 J_2\left\{\cos\left[2l+2g+\varepsilon\left(h-l_3\right)+2\varepsilon\delta l_2\right]+\right.$$

$$e\left[-\frac{1}{2}\cos\left[l+2g+\varepsilon\left(h-l_3\right)+2\,\varepsilon\,\delta\,l_2\right]+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{7}{2}\cos\left[3l+2g+\varepsilon\left(h-l_3\right)+2\,\varepsilon\,\delta\,l_2\right]\right]\right\}+$$
$$-\sum_{\varepsilon\,\delta}\frac{3}{64}(1-\varepsilon\,\theta)^2\left(1-\delta\,\theta_2\right)^2\sin^2 J_2$$
$$\left\{\cos\left[2l+2g+\varepsilon\left(2h-2l_3\right)+2\,\varepsilon\,\delta\,l_2\right]+\right.$$
$$+e\left[-\frac{1}{2}\cos\left[l+2g+\varepsilon\left(2h-2l_3\right)+2\,\varepsilon\,\delta\,l_2\right]+\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.+\frac{7}{2}\cos\left[3l+2g+\varepsilon\left(2h-2l_3\right)+2\,\varepsilon\,\delta\,l_2\right]\right]\right\}\right\}\right\} \tag{4}$$

sendo que: $\sum_{\varepsilon}$ e $\sum_{\varepsilon,\delta}$ significam que δ e ε assumem valores +1 e –1;

M é a massa do satélite;

m é a constante gravitacional da Terra;

$\theta = \frac{H}{G} = \cos I$;

$\theta_2 = \frac{L_3}{L_2} = \cos I_2$;

I é a inclinação orbital;

I_2 é a inclinação do plano do momento angular com o plano do Equador;

$P_2\left(\frac{L_1}{L_2}\right)$ é o polinômio de Legendre;

e é a excentricidade da órbita do satélite;

J_2 é a inclinação do equador do satélite com relação ao plano do momento angular de rotação;

3– Equação Característica do Sistema

Introduzindo o vetor de estado w e o vetor das derivadas H_w [3]:

$$w = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}, \qquad H_w = \begin{bmatrix} F_{L_1} \\ F_{L_2} \\ F_{L_3} \\ F_{l_1} \\ F_{l_2} \\ F_{l_3} \end{bmatrix} \tag{5}$$

as equações do movimento (1) podem ser descritas da seguinte forma:

$$\dot{w} = JH_w \tag{6}$$

sendo J matriz simplética [6] de 2n filas dada por:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & In \\ -In & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

em que In é a matriz identidade de ordem 6.

Observa-se que a variável l_1 não aparece na Hamiltoniana considerada, sendo que sua conjugada L_1 permanece constante. Deste modo pode-se reduzir o sistema a 2 graus de liberdade.

Considerando-se a Hessiana da Hamiltoniana F, o sistema (6) pode ser escrito na forma [6]:

$$\dot{w} = J\,G\,w \tag{8}$$

com a Hessiana G dada por:

$$G=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial l_2^2}=a_{11} & \frac{\partial^2 F}{\partial l_2 \partial l_3}=a_{12} & \frac{\partial^2 F}{\partial l_2 \partial L_2}=a_{13} & \frac{\partial^2 F}{\partial l_2 \partial L_3}=a_{14} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial l_3 \partial l_2}=a_{21} & \frac{\partial^2 F}{\partial l_3^2}=a_{22} & \frac{\partial^2 F}{\partial l_3 \partial L_2}=a_{23} & \frac{\partial^2 F}{\partial l_3 \partial L_3}=a_{24} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial L_2 \partial l_2}=a_{31} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_2 \partial l_3}=a_{32} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_2^2}=a_{33} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_2 \partial L_3}=a_{34} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial L_3 \partial l_2}=a_{41} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_3 \partial l_3}=a_{42} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_3 \partial L_2}=a_{43} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_3^2}=a_{44} \end{pmatrix} \tag{9}$$

e J dado por (7), sendo In a matriz identidade de ordem 4.

Assim a análise da estabilidade do sistema é reduzido ao estudo de um sistema de quatro equações diferenciais. Os elementos da matriz G são facilmente calculados, mas envolvem muitos cálculos algébricos, e por serem muito extensos não serão aqui expostos.

A equação característica associada a matriz JG do sistema (8) pode ser obtida:

$$\text{Det}\,[\, l\ In - \text{JG}] = 0 \qquad (10)$$

sendo expressa da seguinte forma:

$$\alpha_0\lambda^4 + \alpha_2\,\lambda^2 + \alpha_4 = 0 \qquad (11)$$

em que

$$\alpha_0 = 1$$

$$a_2 = -a_{13}^2 + a_{44}\,a_{22} - 2\,a_{14}a_{23} + 2\,a_{12}a_{34} + a_{11}a_{33} + \\ -a_{24}^2$$

$$\alpha_4 = -a_{11}a_{44}a_{23}^2 + a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{12}^2a_{34}^2 - a_{14}^2a_{22}a_{33} + \\ -a_{12}^2a_{33}a_{44} + 2\,a_{12}a_{13}a_{44}a_{23} + a_{11}a_{33}a_{24}^2 + \\ +2\,a_{14}a_{12}a_{24}a_{23} - 2\,a_{14}a_{13}a_{24}a_{23} + 2\,a_{13}a_{22}a_{14}a_{34} + \\ -2\,a_{13}a_{12}a_{34}a_{24} + 2\,a_{11}a_{23}a_{24}a_{34} - a_{11}a_{22}a_{34}^2 + \\ -a_{44}a_{22}a_{13}^2 + a_{24}^2a_{13}^2a_{14}^2a_{23}^2$$

O polinômio característico (11) é uma função par, visto que os coeficientes a_3 e a_1 são nulos, assim se λ é uma raiz característica deste polinômio tem-se que $-\lambda$ também é, com a mesma multiplicidade.

4– Critério de Estabilidade de Routh Hurwitz

O critério de estabilidade de Routh Hurwitz permite investigar a estabilidade absoluta dos sistemas, através dos coeficientes das equações características [5].

O procedimento utilizado nesta técnica se resume em:

1) Escrever a equação característica de S na seguinte forma:

$$a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \ldots + a_{n-1}S + a_n = 0 \qquad (13)$$

2) Se um dos coeficientes é zero ou negativo na presença de pelo menos um coeficiente positivo, então há pelo menos uma raiz com parte real positiva e portanto o sistema NÃO É ESTÁVEL.

3) Se todos os coeficientes são positivos, é cosntruída uma tabela (tabela de Routh), cujos os elementos estão associados com os coeficientes da equação característica em linhas e colunas da seguinte forma:

$$\begin{array}{lllllll}
S^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
S^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
S^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
S^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & & & & & \\
S^2 & d_1 & d_2 & \cdots & & \\
S^1 & e_1 & \cdots & & & \\
S^0 & f_1 & \cdots & & &
\end{array} \qquad (14)$$

em que: b_n, c_n, d_n, e_n, f_n são formados pela combinação entre os elementos das linhas anteriores.

- O critério de estabilidade de Routh Hurwitz diz que o número de raízes da equação característica com parte real positiva, é igual ao número de mudanças de sinal nos coeficientes da primeira coluna da tabela $(a_0,\ a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1,\ e_1,\ f_1)$.

- Se todos estes coeficientes possuem o mesmo sinal, então todas as raízes da equação característica apresentam parte real negativa e portanto o sistema é ESTÁVEL.

4.1– Aplicação do Critério de Routh Hurwitz para Analise da Estabilidade do Movimento Rotacional

Para o caso da equação característica (11), associada ao movimento rotacional em estudo, a primeira linha da tabela de Routh (14) é formada pelos coeficientes da equação característica $\alpha_0, \alpha_2, \alpha_4$. A segunda linha seria formada pelos coeficientes α_1 e α_3, que são nulos. Como existe uma linha nula na tabela de Routh, é necessário a utilização de um polinômio auxiliar [5], formado a partir da derivada de (11) em relação a l:

$$P(l) = \alpha_0\lambda^4 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_4 = 0$$

$$\frac{dP(l)}{dl} = 4\alpha_0\lambda^3 + 2\alpha_2\lambda^1 \qquad (17)$$

Assim podemos construir a tabela a seguir:

λ^4	α_0	α_2	α_4
λ^3	$4\alpha_0$	$2\alpha_2$	0
λ^2	b_1	b_2	0
λ^1	c_1	0	
λ^0	d_1		

em que: $$b_1 = \frac{4\alpha_0\alpha_2 - \alpha_0 2\alpha_2}{4\alpha_0} = \frac{\alpha_2}{2}$$

$$b_2 = \frac{4\alpha_4\alpha_0 - \alpha_0 0}{4\alpha_0} = \alpha_4$$

$$c_1 = \frac{b_1 2\alpha_2 - 4\alpha_0 b_2}{b_1} = \frac{2(\alpha_2^2 - 4\alpha_0\alpha_4)}{\alpha_2}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 0}{c_1} = b_2 = \alpha_4$$

Pelo critério de Routh todos os elementos da primeira coluna da tabela devem ter o mesmo sinal para que o sistema seja estável. No caso em estudo, o primeiro termo da primeira coluna $\alpha_0 = 1$, ou seja, é positivo. Logo para que o sistema seja estável é necessário que os demais termos da primeira coluna sejam maiores que zero, ou seja:

$$\alpha_0,\ b_1,\ c_1,\ d_1 > 0 .$$

Assim as seguintes condições são necessárias:

$$\begin{aligned} &\alpha_0 > 0 \\ &\alpha_2 > 0 \\ &\alpha_4 > 0 \\ &\alpha_2^2 > 4\alpha_0\alpha_4 \end{aligned} \qquad (18)$$

Então para o tipo de equação característica (11), pelo critério de Routh temos que as condições (18) devem ser satisfeitas para que o sistema seja ESTÁVEL.

4.2– Aplicação para um Caso Particular

Considera-se condições particulares para as variáveis de Andoyer e de Delaunay para um satélite simétrico [1] .

Dados orbitais e geométricos

$$\begin{aligned} &\mu = 3{,}986003 \times 10^5\ \mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2 \\ &I = 0{,}5533\ \mathrm{rad} \\ &e = 0{,}01617 \\ &a = 6{,}95964 \times 10^3\ \mathrm{km} \\ &M = 11550\ \mathrm{kg} \\ &A = B = 1{,}0307 \times 10^{-1}\ \mathrm{kg\ km}^2 \\ &C = 3{,}9499 \times 10^{-1}\ \mathrm{kg\ km}^2 \end{aligned}$$

Variáveis de Andoyer e de Delaunay

$$L_1 = 0 \qquad l_1 = \frac{\pi}{2}\mathrm{rad}$$

$$L_2 = 9{,}7307 \times 10^3\ \mathrm{kg\ m^2 s^{-1}} \qquad l_2 = \frac{\pi}{2}\mathrm{rad}$$

$$L_3 = -2{,}9956 \times 10^3\ \mathrm{kg\ m^2 s^{-1}} \qquad l_3 = 4{,}8244\,\mathrm{rad}$$

$$I_2 = 1{,}8837\,\mathrm{rad} \qquad J_2 = \frac{\pi}{2}\mathrm{rad}$$

$$L = \sqrt{\mu\, a} \qquad l = 0$$

$$G = L\sqrt{1-e^2} \qquad g = 0$$

$$H = G \cos I \qquad h = \frac{\pi}{6}\,\text{rad}$$

A equação característica para este caso particular tem a forma (11) e no item 4.1 foram apresentadas as condições que devem ser satisfeitas. Então a partir dos dados assumidos encontra-se os valores dos coeficientes α_2 e α_4 implementando-se numericamente as equações, obtendo-se:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -2{,}662 \times 10^{-5} \\ \alpha_4 &= 4{,}228 \times 10^{-5} \end{aligned} \quad . \tag{19}$$

Deste modo duas das condições (18) não são satisfeitas pelo resultado obtido em (19). Pode-se ainda observar que a equação característica possui um coeficiente negativo na presença de dois coeficientes positivos ($\alpha_0 = 1$, $\alpha_2 < 0$ e $\alpha_4 > 0$).

Portanto pelo critério de Routh Hurwitz, o sistema (8) associado ao movimento rotacional de um satélite simétrico, sob a influência do torque de gradiente de gravidade, para este caso em particular NÃO É ESTÁVEL.

Pela tabela de Routh para este caso:

λ^4	1	$-2{,}662 \times 10^{-5}$	$4{,}23\times10^{-5}$
λ^3	4	$-5{,}324\times10^{-5}$	0
λ^2	$-1{,}33\times10^{-5}$	$4{,}23\times10^{-5}$	0
λ^1	$12{,}697$	0	
λ^0	$4{,}23\times10^{-5}$		

Observa-se que ocorrem duas mudanças de sinal na primeira coluna da tabela de Routh, o que corresponde a duas raízes características com parte real positiva, que acarretam em instabilidade para as condições assumidas neste caso particular.

4 - Conclusão

A estabilidade de um sistema dinâmico associado ao movimento rotacional de um satélite artificial simétrico, sob a influência do torque de gradiente de gravidade, foi analisada através do critério de Routh Hurwitz. As equações do movimento rotacional foram descritas pelas variáveis de Andoyer. Após a linearização das equações do movimento, obteve-se a equação característica do sistema e determinou-se quatro condições a serem satisfeitas para que o sistema fosse considerado estável, através do critério de estabilidade de Routh Hurwitz. Para um caso particular verificou-se que duas das condições necessárias não eram satisfeitas, acarretando na instabilidade do sistema, nas condições assumidas.

Referências

[1] M. C. Zanardi, Movimento Translacional-Rotacional , Acoplado, de Satélites Artificiais Dissertação de mestrado, São José dos Campos, Brasil, 1983, 190 p.

[2] M. C. Zanardi, Study of the Terms of Coupling Between Rotational and Translational Motions, *Celestial Mechanics*, vol. 39, 1986, pp. 147-158.

[3] O. Costa Filho, Uma Forma Normal para Sistemas Dinâmicos Hamiltonianos, Anais do I Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações, Vol. 1, 2002, pp. 211-234.

[4] A. Santos, Estabilidade do Equilíbrio de um Satélite em Órbita Circular Sujeito a Ação dos Torques Gravitacional e Aerodinâmico, Dissertação de Mestrado, São José dos Campos, Brasil, pág. 48 – 53.

[5] K. Ogata, "Engenharia de Controle Moderno", Prentice-Hall do Brasil, Editora Afiliada, 3º ed., pág. 193 – 197.

[6] C. L. Siegel, "Curso de Mecânica Celeste", Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, pp. 93-102.